# 35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
# PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
# GABARITO

## GABARITO NÍVEL 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) C | 6) D | 11) B | 16) D | 21) C |
| 2) D | 7) E | 12) C | 17) A | 22) C |
| 3) D | 8) A | 13) B | 18) A | 23) C |
| 4) E | 9) B | 14) D | 19) C | 24) C |
| 5) B | 10) C | 15) D | 20) D | 25) E |

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br**

**1) (C)** O próximo ano cujos algarismos são 0, 1, 2, 3, em alguma ordem, é 2031, que é daqui a 18 anos.

**2) (D)** Comprando hoje o computador, Joana gastaria $1900$ reais. Esperando o próximo dia, o preço do computador subiria para $2100$ reais e ela gastaria $\frac{95}{100}\times 2100 = 1995$ reais. Assim, ela perderia 95 reais.

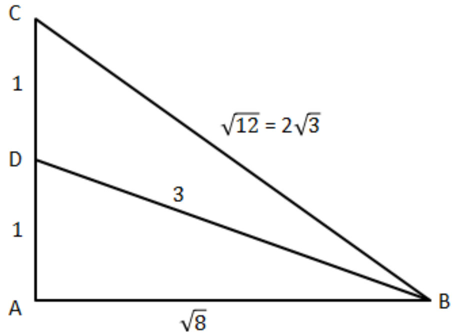
**3) (D)** A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual à 9 + 9 = 18. Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

**4) (E)** A primeira condição nos diz que $n \geq 55$ e a segunda que $n \leq 59$. Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando $n = 56, 57, 58$ ou $59$.

**5) (B)** Temos que $2013 = 3\times 11\times 61$. Como o número 50 está na segunda coluna, o quadriculado retangular possui $33$ linhas e 61 colunas. Assim, ao fim da 30ª coluna, escrevemos $33\times 30 = 990$ números. Portanto, o número 1000 será escrito na 31ª coluna.

**6) (D)** Temos que $a^2 + ab - b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pois *a* e *b* são reais positivos. Queremos calcular $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 = 2 + \sqrt{5}$.

**7) (E)** Como *AC* = 2, temos que *AD* = *DC* = 1. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo *DAB*, temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo *ABC*, temos: $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$.



**8) (A)** Note que na linha $k$ aparecem exatamente os $k$ ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha $j$ qualquer é o $[j.(j+1)/2]$-ésimo impar. Dessa forma, temos que os $k$ ímpares da linha $k$ estão compreendidos no intervalo de $[(k–1).k/2 + 1]$ até $[k.(k+1)/2]$. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar $k$ inteiro que satisfaça:

$$(k–1).k/2 + 1 < 1007 < k.(k + 1)/2.$$

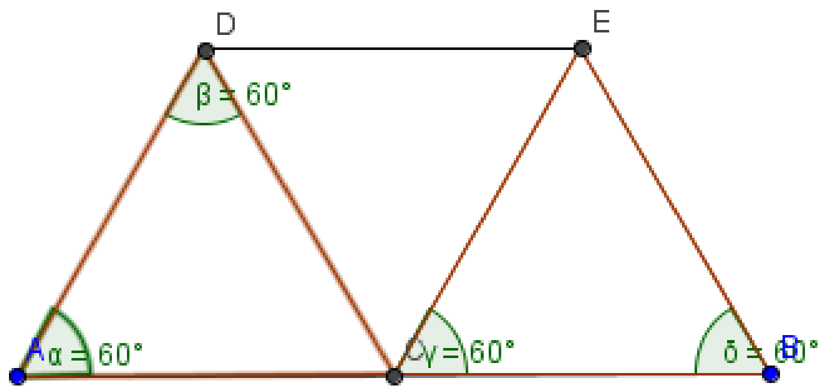
A primeira desigualdade implica que $(k-1)^2 < 2\cdot 1006$, ou seja, $k < \sqrt{2012}+1 < 46$. A segunda desigualdade implica que $8057/4 < (k + 1/2)^2$ e consequentemente $\sqrt{8057}/2 - 1/2 < k$. O único inteiro nesse intervalo é $k = 45$.

**9) (B)** Contaremos inicialmente o número de triplas ordenadas de arestas $(a,b,c)$ do cubo, onde quaisquer duas arestas são reversas. Podemos escolher inicialmente qualquer aresta $a$, o que pode ser feito de 12 maneiras. Feito isso, temos 4 escolhas para $b$ e as escolhas de $a$ e $b$ automaticamente determinam $c$. Então, há $12\cdot 4 = 48$ triplas. Entretanto, cada tripla foi contada 3! = 6 vezes e, portanto, a resposta pedida é $\frac{48}{6} = 8$.

**10) (C)** Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 9 + 2\cdot 6 = 27$, podemos concluir que $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$.

**11) (B)** A quantidade máxima de triângulos equiláteros é três.

Um exemplo de que esse valor pode ser atingido é:




Os triângulos $ACD, CDE$ e $BCE$ são equiláteros.

Suponha que haja quatro triângulos equiláteros com vértices em cinco pontos do plano, digamos $A, B, C, D, E$. Digamos que $ABC$ é equilátero. Se nenhum dos triângulos que usa dois dos vértices de $ABC$, ou seja, $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$, é equilátero, devemos ter que os triângulos $ADE, BDE$ e $CDE$ são equiláteros. Mas com isso teríamos que

$AD = BD = CD = DE = EA = EB = EC$, o que implicaria que $D$ e $E$ coincidem, pois ambos seriam circuncentro do triângulo $ABC$. Então, um dos triângulos $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$ é equilátero. Digamos então que $DBC$ é equilátero. Daí, $ABDC$ é um losango de ângulos $60°, 120°, 60°, 120°$. Agora, basta notar que dentre os triângulos $EAB, EAC, EBC, EBD, ECD$, só pode haver no máximo um triângulo equilátero. Isso é fácil de se testar, se um é equilátero nenhum dos outros poderá ser. Logo não é possível termos quatro triângulos equiláteros.

**12) (C)** Como $O$ é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = 2\angle OEA = 35^\circ$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$

**13) (B)** Sendo $t$ o tempo que as bolas levam para se encontrar, temos que a bola de Jade Maravilha percorreu na vertical $(vt).sen\alpha$ e que a bola de Super Esmeralda percorreu na vertical $(60t).sen30°$. Como essas distâncias são iguais, temos ter $v = 30/\,sen\ \alpha$. Para que $v$ seja mínimo, devemos ter o valor máximo $\operatorname{sen}\alpha = 1$ e daí $v = 30$ km/h.

**14) (D)** A *órbita* de um número $x$ é definida como sendo o conjunto formado pelas iterações de $f$, ou seja, a órbita de $x$ é o conjunto $\{x, f(x), f(f(x)), \ldots\}$. Assim, vejamos as órbitas do números de 1 a 9:

Órbita do 1: 2 elementos

Órbita do 2: 3 elementos

Órbita do 3: 3 elementos

Órbita do 4: 4 elementos

Órbita do 5: 3 elementos

Órbita do 6: 4 elementos

Órbita do 7: 4 elementos

Órbita do 8: 2 elementos

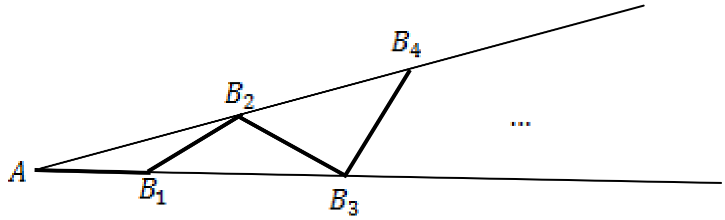
Órbita do 9: 4 elementos

Veja que se tivermos $f$ aplicada um múltiplo da órbita de $x$ de vezes então voltaremos a $x$, assim o valor desejado é um múltiplo de todas as órbitas, logo estamos interessados em $\operatorname{mmc}(2,3,4) = 12$.

**15) (D)** As potências perfeitas de 1 a 100 que não são quadrados perfeitos são: 8, 27 e 32. Veja então que, para $1 \le k \le 100$, $f(k) = 8 \Leftrightarrow k = 8$, $f(k) = 27 \Leftrightarrow k = 27, 28, 29, 30, 31$ e $f(k) = 32 \Leftrightarrow k = 32, 33, 34, 35$. Logo, $f(k)$ é quadrado perfeito para

$100-(1+5+4)=90$ valores de $k$ e, portanto, a probabilidade de $f(k)$ ser quadrado perfeito é de $90\%$.

**16) (D)**




Veja que se $<AB_2B_1=1°$ e que, portanto, $<B_2B_1B_3=<AB_3B_2=2°$. Da mesma forma, $<AB_4B_3=3°$. Continuando, é fácil ver que $<AB_nB_{n-1}=(n-1)°$. Agora, no triângulo $B_nB_{n-1}B_{n-2}$, temos que $<B_{n-1}B_{n-2}B_n=<AB_nB_{n-1}=(n-1)°$. Logo, $2n-2<180 \Rightarrow n<91$ e daí o maior valor possível de $n$ é 90.

**17) (A)** Se a pulga $P_1$ deu $k_1$ saltos e a pulga $P_2$ deu $k_2$ saltos, temos: $k_1m=k_2n=100$. Logo, $m$ e $n$ são divisores de 100. Como elas se encontram pela primeira vez em 1 metro, então $mmc(m,n)=100=2^2.5^2$, logo $5^2|n$ ou $5^2|m$. Se $5^2\nmid n$ então necessariamente $5^2|m \Longrightarrow n\le 20<25\le m$, contrariando $n>m$. Logo, $5^2|n \Leftrightarrow n=25, 50$ ou $100$. Para $n=100$, $m$ pode ser qualquer um dos outros $8$ divisores de $100$. Para $n=25$ ou $n=50$, temos que $4|m$, logo $m=4$ ou $m=20$. No total, teremos: $8+2.2=12$

**18) (A)** Como cada caixa deve ter um número diferente de bolas brancas e há 10 bolas brancas para 5 caixas, haverá necessariamente uma caixa com nenhuma bola branca, uma com 1 bola branca, uma com 2 bolas brancas, uma com 3 bolas brancas e outra com 4 bolas brancas. Então, basta distribuirmos as bolas vermelhas nas 5 caixas restantes. Chamemos de caixa *i* a caixa que está com *i* bolas brancas no momento. Se a caixa *i* receber $x_i$ bolas vermelhas, devemos ter $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=8$, onde $x_0,x_1,x_2,x_3,x_4$ são inteiros não-negativos e $x_0\ge 1$. Faça $x_0=y_0+1$, de forma que agora estamos interessados no número de soluções inteiras não-negativas de $y_0+x_1+x_2+x_3+x_4=7$. Fazendo uma bijeção das soluções dessa equação com o número de permutações de 7 bolinhas e 4 palitinhos, temos $\binom{11}{4}=330$ maneiras de distribuir as bolas.

**19) (C)** Como $3^2<10$, temos $3^{400}=(3^2)^{200}<10^{200}$. Além disso, como $3^4=81>2^3\cdot 10$, também temos $3^{400}=(3^4)^{100}>(2^3\cdot 10)^{100}=2^{300}\cdot 10^{100}$. Note que $2^4=16>10$, e assim $3^{400}=2^{300}\cdot 10^{100}=(2^4)^{75}\cdot 10^{100}>10^{175}$. Daí, podemos concluir que $3^{400}$ possui entre 175 e 200 dígitos.

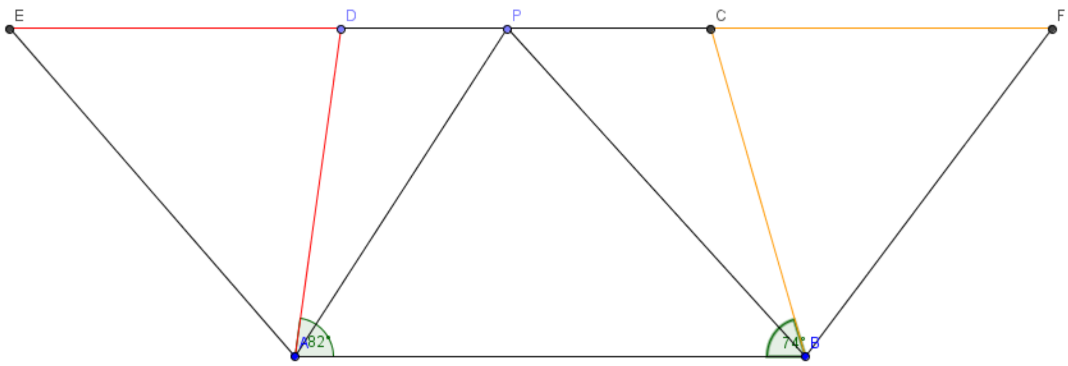
**20) (D)** Temos que $a^2+b+c=b^2+c+a \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0$. Então, $a=b$ ou $a+b=1$. Da mesma forma, $a=c$ ou $a+c=1$ e $b=c$ ou $b+c=1$. Note que não podemos ter simultaneamente $a+b=1, a+c=1, b+c=1$ (pois *a, b, c* são inteiros). Então, podemos supor sem perdas que $a=b$. Agora, temos dois casos a considerar: $a=b=c$ ou $a=b$ e $c=1-a$.

No primeiro caso, $k=a^2+2a \Leftrightarrow k+1=(a+1)^2$. Então, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 2 a 2013, pois $1 \le k \le 2012$. Como $44^2 < 2013 < 45^2$, temos 44 quadrados perfeitos de 1 a 2013. Como 1 é quadrado perfeito e deve ser descontado, temos 43 quadrados perfeitos de 2 a 2013. Logo, há 43 valores possíveis para *k*.

No segundo caso, $k=a^2+1$. Como não há dois quadrados perfeitos diferindo de 2, não há interseções entre o primeiro caso e o segundo. Aqui, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 0 a 2011. Agora, há 45 possíveis valores para *k*.

Logo, o total de valores é 45 + 43 = 88.

**21) (C)** Considere a seguinte figura:




Os pontos $E$ e $F$ pertencem a reta $CD$ e são tais que $DE=DA$ e $CB=CF$. Como $PC+CB=AB$ e $AD+DP=AB$, temos que $EP=PF=AB$ e então como $CD$ é paralelo a $AB$, temos que $EPAB$ e $PFAB$ são paralelogramos. Temos que $< ADE = 82°$ e, como $\Delta ADE$ é isósceles de base $AE$, $< DEA = < PBA = 49°$. Da mesma forma, $\Delta FCB$ isósceles e $< FCB = 74°$, então $< PFB = PAB = 53°$. Daí, $< APB = 180° - 49° - 53° = 78°$.

**22) (C)** Sejam *A* o conjunto dos números de quatro algarimos distintos que possuem 4 nos milhares, *B* o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 3 nas centenas, *C* o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 2 nas dezenas e *D* o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 1 nas unidades. A quantidade descrita no problema é $9 \cdot 9 \cdot 8.7 - n(A \cup B \cup C \cup D)$, lembrado que para um número ter 4 algarismos não pode ter dígito dos milhares 0.

Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos que

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(A \cap B)-$$
$$n(A \cap C)-n(A \cap D)-n(B \cap C)-n(B \cap D)-n(C \cap D)+n(A \cap B \cap C)$$
$$+n(A \cap B \cap D)+n(A \cap C \cap D)+n(B \cap C \cap D)-n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Contando os números, tem-se $n(A) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ e $n(B) = n(C) = n(D) = 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$. Também temos $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = 8 \cdot 7 = 56$ e $n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 7 \cdot 7 = 49$.

Ainda, $n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = 7$ e $n(B \cap C \cap D) = 6$.

Por fim, $n(A \cap B \cap C \cap D) = 1$, apenas o número 4321.

Logo, $n(A \cup B \cup C \cup D) = (504 + 3.448) - (3.56 + 3.49) + (3.7 + 6) - 1 = 1559$.

Daí, a quantidade é $4536 - 1559 = 2977$, que se encaixa no item C.

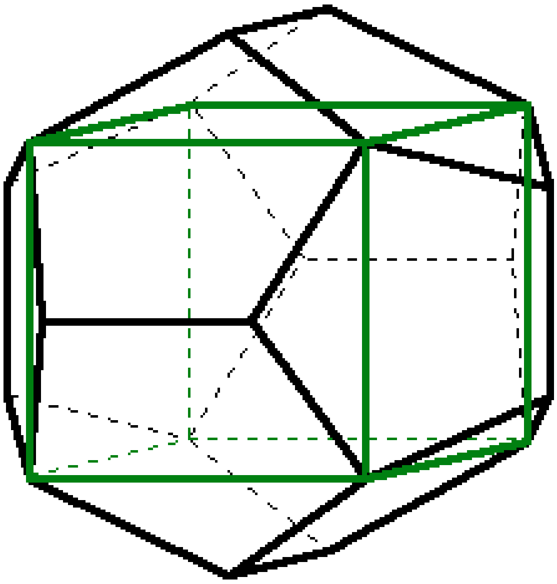
**23) (C)** A equação dada é equivalente a $x(x + 2013 \cdot 2012) = 2013^y$. Veja que $2013 \mid x(x + 2013 \cdot 2012) \Rightarrow 2013 \mid x^2 \Rightarrow 2013 \mid x$, pois $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ é livre de quadrados. Fazendo então $x = 2013k$, temos $2013^2 k(k + 2012) = 2013^y \Leftrightarrow k(k + 2012) = 2013^{y-2} \, (y > 2)$. Se $y = 3$, temos $k = 1$, o que nos dá uma solução. Suponhamos agora $y > 3$ e daí se $d \mid k$ e $d \mid k + 2012$, teríamos $d \mid 2012$, o que nos dá $d = 1$, pois 2012 e 2013 são primos entre si. Logo, podemos escrever $k = a^{y-2}$ e $k + 2012 = b^{y-2}$, onde *a* e *b* são inteiros positivos tais que $ab = 2013$. Então, $b^{y-2} - a^{y-2} = 2012$. Temos que $b^{y-2} - a^{y-2}$ é função crescente de *y* e, portanto, $2012 \geq b^2 - a^2$, com $ab = 2013$. Temos poucas possibilidades para *a* e *b*: podemos ter $(a, b) = (1, 2013), (3, 671), (11, 183), (33, 61)$. Em todos os casos, temos que $b^2 - a^2 > 2012$, contradição. Portanto, $y = 3$ de fato.

**24) (C)** Como $p(x)$ é par, *p* possui apenas monômios de grau par, ou seja, podemos escrever $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0$ (isto pode ser demonstrado através da identidade polinomial $p(x) = p(-x)$), onde $a_{2n}, a_{2n-2}, \ldots, a_0 \geq 0$

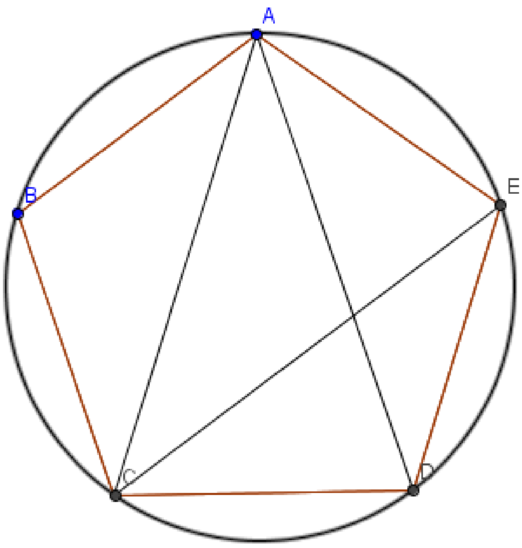
Então, para $x \geq 0$, veja que $p$ é função crescente de *x*, pois é soma de funções crescentes e da mesma forma, para $x < 0$, *p* é função decrescente de *x*, pois é soma de funções decrescentes.

Daí, $p(x) = k$ pode ter no máximo duas soluções (uma não-negativa e outra negativa). Para $p(x) = x^2$ e *k* = 1, temos a igualdade, pois as soluções de $p(x) = k$ são $x = 1$ ou $x = -1$.

**25) (E)** Considere a seguinte figura:



Temos que a aresta do cubo é a diagonal de um pentágono regular de lado 1 (todas as diagonais de um pentágono regular são congruentes).




Sendo $AD = AC = CE = x$, temos pelo teorema de Ptolomeu no quadrilátero $AEDC$ que $x^2 = x + 1$, logo $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a raíz positiva da equação. O volume do cubo é $x^3 = x^2 + x = 2x + 1$. Substituindo, o volume do cubo é $2+\sqrt{5}$.