35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

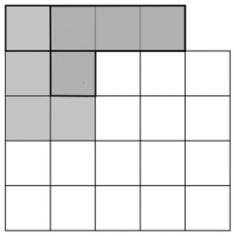
1) D)	6) D)	11) E)	16) B)	21) D)
2) A)	7) D)	12) C)	17) C)	22) B)
3) D)	8) E)	13) D)	18) C)	23) A)
4) A)	9) A)	14) D)	19) A)	24) A)
5) E)	10) A)	15) E)	20) A)	25) C)

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto (Total de pontos = 25 pontos)**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site da OBM: www.obm.org.br**

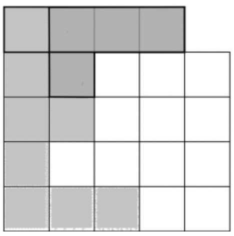
1) (D) Precisamos comparar os valores pagos em ambas as situações:
Hoje: $2000 \times 95\% = 1900$
Amanhã: $(2000 \times 105\%) \times 95\% = 1995$
Assim, pagando amanhã, teremos um valor maior em 95 reais.

2) (A) Vejamos que podemos completar o 1º desnível vertical usando 2 peças $1x1x2$ em pé e, assim, fazer com que o bloco tenha uma altura mínima três. Depois, podemos usar mais 6 peças $1x1x2$ em pé para completar o 2º desnível vertical e, assim, fazer com o que o bloco tenha uma altura mínima cinco. Por último, podemos usar 4 peças $1x1x2$ na horizontal para completar o bloco retangular.

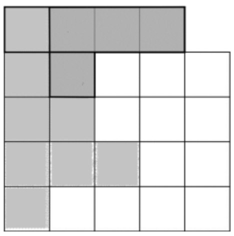
3) (D) Notemos que só há um jeito de preencher o quadrado do esquerdo e alto, conforme mostrado na figura ao lado.



Para preencher o próximo, observando o lado esquerdo, há duas opções conforme mostrado abaixo:

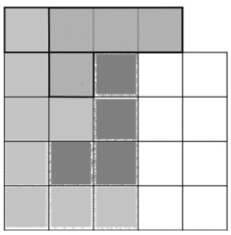


(caso 1)

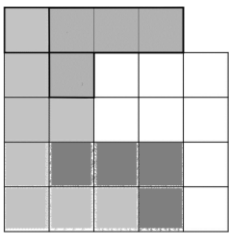


(caso 2)

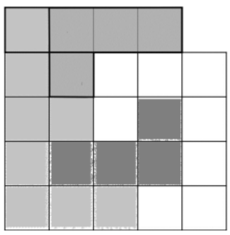
Vejamos que o caso 1 pode ser dividido em outros três sub-casos:



(caso 1.1)



(caso 1.2)



(caso 1.3)

Os casos 1.1, 1.2 e 1.3 possuem exatamente 2, 1 e 1 formas de completamento, respectivamente. Já o caso 2 possui uma forma de completar. Portanto, somando tudo, temos 5 formas de completar o tabuleiro com tais peças.

4) (A) Convertendo os lados o quadrado pela escala dada, concluímos que as dimensões reais do dormitório são $10\times 45cm$ e $6\times 45cm$. Multiplicando ambos valores obtemos $12{,}15\ m^2$.

5) (E) O perímetro total do pentágono é 12. Assim, a cada 12 segundos a formiguinha volta para o vértice *A*. Como 2004 é múltiplo de 12, basta analisarmos onde ela estará 9 segundos após sair do vértice A. Como $AB+BC+CD+DE=9$, ela estará no vértice *E*.

6) (D) A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual à 9 + 9 = 18. Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

7) (D) Como 1001 é múltiplo de 7, $925925=1001\cdot 925$ também é. Em geral, qualquer numero de seis algarismos onde os três primeiros formam um número igual aos três últimos é um múltiplo de 7. Usando esse fato é fácil verificar que nenhuma outra das opções contém um múltiplo de 7.

8) (E) A primeira condição nos diz que $n\geq 55$ e a segunda que $n\leq 59$. Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando $n=56,57,58$ ou 59

9) (A) Façamos 3 casos e analisemos, entre os porteiros, quem falou a verdade e quem mentiu.

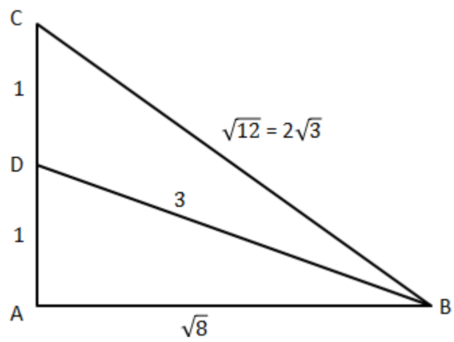
- Caso 1: Porta 1 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1 e 3 falaram a verdade e o porteiro 2 mentiu. Ok!
- Caso 2: Porta 2 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1, 2 e 3 falaram a verdade. Falso, pois, pelo menos, um porteiro mentiu.
- Caso 3: Porta 3 está com o prêmio. Nesse caso, os porteiros 1, 2 e 3 mentiram. Falso, pois, pelo menos, um porteiro falou a verdade.

10) (A) Note que na linha *k* aparecem exatamente os *k* ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha *j* qualquer é o [*j*.(*j*+1)/2]-ésimo ímpar. Dessa forma, temos que os *k* ímpares da linha *k* estão compreendidos no intervalo de [(*k* – 1).*k*/2 + 1] até [*k*.(*k* + 1)/2]. Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar *k* inteiro que satisfaça:

$$(k-1).k/2+1<1007<k.(k+1)/2.$$

A primeira desigualdade implica que $(k-1)^2<2\cdot 1006$, ou seja, $k<\sqrt{2012}+1<46$. A segunda desigualdade implica que $8057/4<(k+1/2)^2$ e consequentemente $\sqrt{8057}/2-1/2<k$. O único inteiro nesse intervalo é *k* = 45.

11) (E) Como $AC = 2$, temos que $AD = DC = 1$. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo *DAB*, temos $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$. Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo *ABC*, temos: $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$.



12) (C) Os amigos podem ser divididos em três grupos de que percorrem suas trajetórias em ciclos.
Cidades do ciclo 1: 1, 6, 8 e 1.
Cidades do ciclo 2: 9,4,7,11,5 e 2
Cidades do ciclo 3: 3, 10

Em cada ciclo, transcorridas uma quantidade de dias múltipla do tamanho do ciclo, todos os viajantes voltam para as suas cidades de origem e isso acontece apenas nessa ocasião. Sendo assim, o número mínimo de tempo para que todos voltem para suas cidades de origem é um o menor múltiplo comum dos tamanhos dos ciclos, ou seja, o número 6.

13) (D)

Solução 1:
Note que $32 = 8\times4$, $33 = 8\times3+9\times1$, $34 = 8\times3+10\times1$, $35 = 8\times2+9\times1+10\times1$, $36 = 8\times2+10\times2$, $37 = 8\times1+9\times1+10\times2$, $38 = 8\times1+10\times3$ e $39 = 9\times1+10\times3$ são quantidades admissíveis de compras de chocolates. Como temos 8 números consecutivos, acrescentando-se múltiplos de 8 podemos comprar qualquer quantidade de chocolates maior ou igual à 32. Se 31 pudesse ser comprado, como 8 e 10 são pares, devemos usar uma quantidade ímpar de caixas com 9 chocolates. Não podemos usar três caixas pois $31 - 9\times3 = 4$ e as outras caixas possuem mais que 4 chocolates. Se usarmos apenas uma caixa, temos que obter o número 22 apenas com caixas de 8 e 10. Como não podemos usar mais duas de qualquer uma dessas caixas, é fácil verificar que não podemos obter o 22 e consequentemente 31 é a maior quantidade de chocolates não admissível.

Solução 2:
As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma $8x+9y+10z$ com x, y e z inteiros não negativos. Todo número maior que $56 = (8-1)(9-1)$ pode ser escrito na forma $8x+9y$ com x e y inteiros não negativos. Um número que pode ser escrito na forma $8x+9y$ em particular também pode ser escrito na forma $8x+9y+10z$. Assim, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. É fácil verificar, como na primeira solução, que todos os números de 32 até 55 podem ser escritos na forma $8x+9y+10z$ e que 31 não.

14) (D) Contaremos iniciamente quantos inteiros menores ou iguais a 100 que não satisfazem essa propriedade. Tal inteiro deverá ser maior ou igual à uma potência perfeita que não é um quadrado perfeito e menor que o próximo quadrado perfeito maior que esta potência. A única potência perfeita no intervalo investigado e que não é um quadrado perfeito é o número 3^3. O próximo quadrado perfeito é o número 6^2. Assim, existem $10 = 6^2 - 3^3 + 1$ números que não satisfazem a propriedade mencionada e consequemententemente a resposta é o complementar: $100 - 10 = 90$.

15) (E) Se *VA* = diâmetro = 60 metros, então *HB* = raio = 30 metros. Logo, o ataque do herói levará $30/15 = 2$ segundos para chegar até o ponto *B*. Nesse tempo, o ataque do vilão percorreu $2 \cdot 10\pi = 20\pi$. Logo o arco BA mede $30\pi - 20\pi = 10\pi = 1/3 \cdot 30\pi$ e consequentemente o ângulo $\angle BHA = 60^\circ$.

16) (B) O máximo divisor comum deve dividir a diferença entre quaisquer dois desses números. Note que $123456798 - 123456789 = 9$ e assim o máximo divisor comum é no máximo 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, como $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ é divísivel por 9, temos que 9 realmente divide todos esses números.

17) (C) Como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 9 + 2 \cdot 6 = 27$, podemos concluir que $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$.

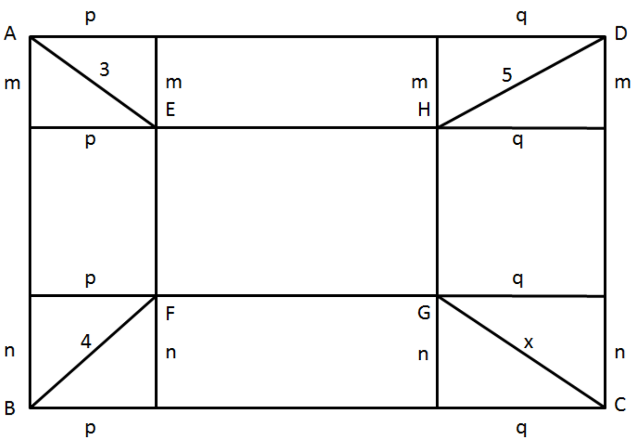
18) (C) Como O é o centro do círculo, temos $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$. Como $AO = OE$, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo $\angle EOB$, temos $\angle EAO = 2\angle OEA = 35^\circ$. Daí, $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$. Como $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$, podemos concluir que $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$

19) (A) Os primeiros 11 termos da sequência são: 0,1,2,3,0,2,0,3,2,1 e 0. Para o cálculo do resto, o efeito de somarmos quatro múltiplos de 4 é o mesmo que somarmos nenhum múltiplo de 4 e assim é como se a sequência estivesse recomeçando. Com isso podemos concluir que a sequência se repete de 11 em 11 termos. Como 2013 é múltiplo de 11, o 2013º termo da sequência é o número 0.

20) (A) Os dígitos admissíveis para os números interessantes invertidos são: 0,2,5,6,8 e 9. Como o dígito 0 não pode ocupar a posição das centenas, temos apenas 5 possibilidades de escolhas para o dígito das centenas e das unidades. Para o dígito das dezenas, temos 6. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $5 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ números interessantes invertidos.

21) (D) Os dígitos admissíveis para os números interessantes espelhados são: 0,2,3,5 e 8. Como o dígito 0 não pode ocupar a posição das centenas, temos apenas 4 possibilidades de escolhas para cada um dos dígitos das centenas e das unidades. Para o dígito das dezenas, temos 4. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ números interessantes invertidos.

22) (B) Tracemos perpendiculares dos pontos *E*, *F*, *G* e *H* para os lados do retângulo *ABCD* e chamemos tais segmentos de *m*, *p*, *n* e *r*, conforme mostrado na figura ao lado. Aplicando teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos formados pelos lados *AE*, *BF*, *CG* e *DH*, temos que:



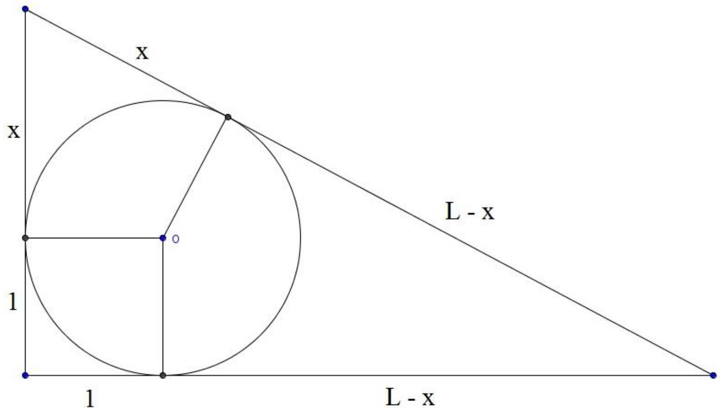
- Lado *AE*: $m^2 + p^2 = 3^2$ (I)
- Lado *BF*: $p^2 + n^2 = 4^2$ (II)
- Lado *CG*: $n^2 + q^2 = x^2$ (III)
- Lado *DH*: $q^2 + m^2 = 5^2$ (IV)

Daí, temos que:

- (I) + (III): $m^2 + p^2 + n^2 + q^2 = 3^2 + x^2$ (V)
- (II) + (IV): $p^2 + n^2 + q^2 + m^2 = 4^2 + 5^2$ (VI)
- (V) e (VI): $3^2 + x^2 = 4^2 + 5^2$, o que implica em $x^2 = 25 + 16 - 9$, ou seja $x^2 = 32$

23) (A) Temos quatro opções para o número formado pelos dois últimos algarismos dos números escritos em que a soma dos dois últimos é maior que a dos dois primeiros algarismos: 41, 14, 24 ou 42. Para cada uma dessas opções, temos duas maneiras e posicionarmos os outros dois algarismos dentre os dígitos que faltam. Logo, existem $2 \cdot 4 = 8$ tais números

24) (A)



Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $(x + 1)^2 + (L - x + 1)^2 = L^2$

Daí, $L = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$. Para encontrarmos o menor de L, devemos estudar o menor valor que a função $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ pode assumir. Perceba que:

$$L = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x^2-1+2}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1} = x-1+\frac{2}{x-1}+2 \quad (I)$$

Por $MA \geq MG$, temos:

$$\frac{x-1+\frac{2}{x-1}}{2} \geq \sqrt{(x-1).\frac{2}{(x-1)}} = \sqrt{2} \Rightarrow x-1+\frac{2}{x-1} \geq 2.\sqrt{2} \quad (II)$$

Por (I) e (II), temos: $L \geq 2.\sqrt{2}+2$.

Obs.: Note que o menor L acontece, quando há a igualdade em $MA \geq MG$, ou seja, quando: $x-1=\frac{2}{x-1} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$. Como $x > 0$, devemos ter $x=1+\sqrt{2}$.

25) (C) Como $3^2 < 10$, temos $3^{400} = (3^2)^{200} < 10^{200}$. Além disso, como $3^4 = 81 > 2^3 \cdot 10$, também temos $3^{400} = (3^4)^{100} > (2^3 \cdot 10)^{100} = 2^{300} \cdot 10^{100}$. Note que $2^4 = 16 > 10$, e assim $3^{400} = 2^{300} \cdot 10^{100} = (2^4)^{75} \cdot 10^{100} > 10^{175}$. Daí, podemos concluir que 3^{400} possui entre 175 e 200 dígitos.